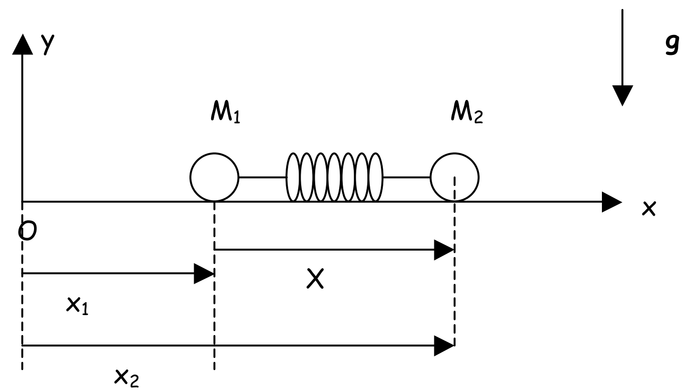
TD : Système de points matériels

Exercice 1 : Système pseudo isolé de deux particules liées par un ressort

Le référentiel du laboratoire $\Re_g(O;\overrightarrow{e_x};\overrightarrow{e_y};\overrightarrow{e_z})$ est supposé galiléen. Deux particules ponctuelles M_1 et M_2 de masses respectives $m_1=2m$ et $m_2=m$ sont liées par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Elles sont astreintes à glisser sans frottement le long d'un axe (Ox), leurs positions respectives étant repérées par les abscisses x_1 et x_2.

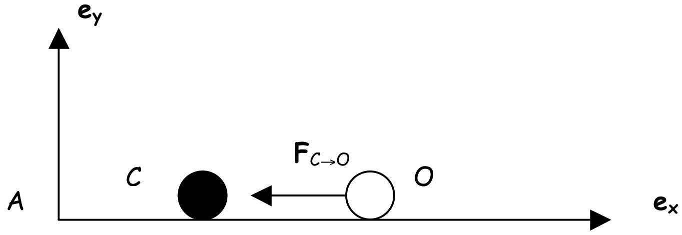


A l'instant t=0 , les vitesses et positions initiales des deux particules dans Rg sont respectivement :$v_1(0)=v_2(0)=0$ et $x_1(0)=0$ et $x_2(0)=l_0+$ D. La position relative de la particule M_2 par rapport à la particule M_1 est notée $X(t)=x_2(t)-x_1(t)$.

1. Déterminer la vitesse du centre de masse G du système S des deux particules. Le référentiel barycentrique R* des deux particules est-il galiléen ?
2. Pour l'étude du mouvement dans R*, exprimer les caractéristiques du mobile réduit M. Exprimer $\overline{GM_1} = x_1^*$ et $\overline{GM_2} = x_2^*$ en fonction de X.
3. Par une étude dynamique, exprimer $\overline{GM_1} = x_1^*$ et $\overline{GM_2} = x_2^*$ dans R*. Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans le référentiel du laboratoire.
4. Déduire de la question précédente l'équation horaire du mouvement de la particule M_2 lorsque la particule M_1 est fixée à l'origine O du référentiel du laboratoire.
5. Revenons au cas où la particule M_1 est libre de se déplacer, et retrouver les résultats précédents par une approche énergétique : Donner l'énergie cinétique Ec*(S) du système S dans le référentiel barycentrique et son énergie cinétique Ec(S) dans le référentiel du laboratoire.
6. Quelle est l'énergie potentielle du système ?
7. Déduire de l'énergie mécanique barycentrique Em*(S) l'équation différentielle du mouvement du mobile réduit vérifiée par X(t).

Exercice 2: Un modèle de la molécule CO

Le référentiel du laboratoire $\Re_g(A;\overrightarrow{e_x};\overrightarrow{e_y};\overrightarrow{e_z})$ est galiléen et le champ de pesanteur négligeable à l'échelle atomique. Une molécule diatomique de monoxyde de carbone CO est constituée d'un atome de carbone C de masse m_C et d'un atome O de masse m_O.



Les atomes sont assimilés à des points matériels et sont repérés par leurs abscisses respectives x_C et x_O. Leur mouvement a lieu selon l'axe $(A;\overrightarrow{e_x})$ et limité à la demi droite (Ax)

La force qu' exerce C sur O est : $\vec{F}_{C\to O} = (-\frac{A}{x^7} + \frac{B}{x^{13}})\ \vec{e}_x$ Les constantes A et B sont positives et $x=x_O-x_C$ est la distance relative entre les deux atomes. Les deux éléments constituant le système S ne sont soumis qu'à cette force d'intégration d'origine électromagnétique.

L'étude sera effectuée dans le référentiel barycentrique R* associé au centre de masse G du système des deux atomes.

1. Justifier le caractère galiléen du référentiel barycentrique.
2. Ecrire les deux équations différentielles du mouvement de C et O dans le référentiel barycentrique R*. En déduire l'équation du mouvement du mobile réduit M dont vous préciserez les caractéristiques.
3. Déterminer l'énergie potentielle d'interaction $E_p(x)$ de la molécule. L'origine de cette énergie est choisie pour une distance infinie séparant les deux atomes.
4. Exprimer la valeur x_{eq} de x à l'équilibre de la molécule dans le référentiel barycentrique. Quelle est la valeur correspondante de l'énergie potentielle $E_p(x_{eq})$.
5. Tracer qualitativement l'allure de graphe de $E_p(x)$. L'équilibre x_{eq} est-il stable ? Quelle est l'expression de l'énergie de dissociation E_d de la molécule ?
6. En effectuant un développement limité de $E_p(x)$ au voisinage de xeq, exprimer la pulsation ω des petites oscillations des atomes autour de leur position d'équilibre en fonction de μ, A et x_{eq}. Comparer les amplitudes des vibrations des atomes de carbone et d'oxygène sachant que $\frac{m_C}{m_O} = \frac{4}{3}$

<u>Eléments de réponse :</u>

Ex2 :

1. Le système carbone-oxygéne=S est un système isolé, donc le centre de masse est en mouvement rectiligne uniforme, donc le référentiel barycentrique est en translation uniforme par rapport au référentiel du laboratoire Rg.
2. On écrit le PFD dans R* sur C(carbone) et sur O (oxygène)

$$m_c \frac{d^2 \overrightarrow{GC}}{d^2t} = \vec{f}_{O\to C} = -\vec{f}_{C\to O}; \quad m_O \frac{d^2 \overrightarrow{GO}}{d^2t} = \vec{f}_{C\to O}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 \overrightarrow{GO}}{d^2t} - \frac{d^2 \overrightarrow{GC}}{d^2t} = \frac{d^2 \overrightarrow{CO}}{d^2t} = \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{d^2t} = \frac{\vec{f}_{C\to O}}{m_0} + \frac{\vec{f}_{C\to O}}{m_C}$$

$$\frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{d^2t} = \frac{\vec{f}_{C\to O}}{\mu} \Rightarrow \mu \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{d^2t} = \vec{f}_{C\to O} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{CO}$$

3. $\delta W(S/R^*) = \vec{f}_{O\to C}\, d\vec{GC} + \vec{f}_{C\to O}\, d\vec{GO} = \vec{f}_{C\to O}(d\vec{GO} - d\vec{GC}) = \vec{f}_{C\to O}\, d\vec{GM} = (-\frac{A}{x^7} + \frac{B}{x^{13}})dx = -dE_P$

   $Ep(x) = -\frac{A}{6x^6} + \frac{B}{12x^{12}}$

4. Equilibre $\frac{dEp(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow x_{eq} = (\frac{B}{A})^{1/6} \Rightarrow Ep(x_{eq}) = -\frac{A^2}{12B}$ Cette position d'équilibre correspond à un équilibre stable car elle correspond à un minimum d'énergie potentielle. On peut calculer la dérivée seconde et vérifiée qu'elle est positive.

5. Energie de dissociation : $Ed = Ep(\infty) - Ep(x_{eq}) = 0 - Ep(x_{eq}) = \frac{A^2}{12B}$

6. On écrit un DL de Ep (x) au voisinage xeq :

   $$Ep(x) = Ep(x_{eq}) + (x - x_{eq})(\frac{dEp}{dx})_{xeq} + \frac{(x - x_{eq})^2}{2}(\frac{d^2Ep}{dx^2})_{xeq}$$

   $$(\frac{d^2Ep}{dx^2})_{xeq} = \frac{6A}{x_{eq}^8}$$

   $$E_{méca}(S/R^*) = E_c(S/R^*) + E_p(x) = \frac{1}{2}\mu(\frac{dX}{dt})^2 + E_p(x) = Cte$$

   $$\frac{dE_{méca}(S/R^*)}{dt} = 0 = \mu\frac{dX}{dt}\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{dEp}{dX}\frac{dX}{dt} = 0 \Rightarrow \mu\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{dEp}{dX} = 0$$

   $$\mu\frac{d^2X}{dt^2} + (x - x_{eq})(\frac{d^2Ep}{dx^2})_{xeq} = 0 \Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{6A}{\mu\, x_{eq}^8}(x - x_{eq}) = 0 \quad \frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2(x - x_{eq})$$

   $$\omega = \sqrt{\frac{6A}{\mu\, x_{eq}^8}}$$

7. $\vec{GC} = -\frac{m_O}{m_O + m_C}\vec{GM} \quad \vec{GO} = \frac{m_C}{m_O + m_C}\vec{GM} \quad \Rightarrow \frac{X_C}{X_O} = -\frac{m_O}{m_C} = -\frac{4}{3}$